



Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Regression
WS 2005/06

Kapitel 17
Bedingte kausale Effekte

Prof. Dr. Rolf Steyer

**Lehrstuhl für Methodenlehre
und Evaluationsforschung**



Tabelle 1. Zahlenbeispiel, in dem für jede einzelne Person ein positiver Effekt der Experimentalgruppe gegenüber der Kontrollgruppe besteht und die Wahrscheinlichkeit, der Experimentalbedingung zugewiesen zu werden, abhängig vom Geschlecht der Person ist

Person	$P(U = u)$	$\mu_{1,u}$	$\mu_{0,u}$	$\mu_{1,u} - \mu_{0,u}$	Geschlecht (Z)	$P(X = 1 U = u)$
u_1	1/6	80	68	12	0	3/4
u_2	1/6	93	81	12	0	3/4
u_3	1/6	103	89	14	0	3/4
u_4	1/6	116	102	14	0	3/4
u_5	1/6	132	123	9	1	1/4
u_6	1/6	148	137	11	1	1/4

Anmerkung. $Z = 0$ steht für männlich, $Z = 1$ steht für weiblich.



	Bedürftigkeit						
	stark		mittel		schwach		gesamt
Therapie	$Z = z_1$		$Z = z_2$		$Z = z_3$		
1 $X = x_1$	120	(40)	110	(20)	60	(6)	(66)
2 $X = x_2$	100	(14)	100	(80)	100	(14)	(108)
3 $X = x_3$	80	(6)	90	(20)	140	(40)	(66)
gesamt	(60)		(120)		(60)		(240)



Box 1. Das Wichtigste zur Theorie bedingter kausaler Effekte

A. Zufallsexperiment und Notation

Menge der möglichen Ergebnisse

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_Z \times \Omega_X \times \Omega_Y$$

Charakterisiert das Zufallsexperiment „Ziehe eine Person $u \in \Omega_U$, registriere ihre Ausprägung $\omega_Z \in \Omega_Z$ hinsichtlich einer bedingenden Variablen (z. B. eines Vortests) sowie ihre Zuweisung zu einer Bedingung $\omega_X \in \Omega_X$ und beobachte die Ausprägung $\omega_Y \in \Omega_Y$.“

Personprojektion

$$U: \Omega \rightarrow \Omega_U$$

Ihr Wert ist die gezogene Person (allgemeiner: Beobachtungseinheit) u .

Kontrollvariable

$$Z: \Omega \rightarrow \Omega'_Z$$

Ihr Wert repräsentiert z. B. die Ausprägung auf einem Vortest oder eine Eigenschaft der Beobachtungseinheit (z.B. ihr Geschlecht). Z kann auch mehrdimensional sein und mit den beiden Komponenten (Z_1, Z_2) beides gleichzeitig repräsentieren.



Treatment-Variable

$$X: \Omega \rightarrow \Omega_X$$

Ihr Wert repräsentiert die der Person zugewiesene (experimentelle) Bedingung ω_X .

Antwortvariable

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Die betrachtete „Antwortvariable“, deren Abhängigkeit von X kausal interpretiert werden soll.

Bedingte Regressionen

$$E_{Z=z}(Y | X)$$

Beschreibt die Abhängigkeiten innerhalb der Ausprägungen z der Kontrollvariablen Z , die kausal interpretiert werden sollen.

Regression

$$E(Y | X, U)$$

Ihre Werte $\mu_{X,u} := E(Y | X=x, U=u)$ sind die meßfehlerbereinigten Werte, d. h. die Erwartungswerte der Antwortvariablen Y einer Person u in einer (Treatment-)Bedingung $X = x$.



B. Definitionen

Individueller kausaler Effekt

$$ICE_u(1, 2) = \mu_{1,u} - \mu_{2,u}$$

Differenz der meßfehlerbereinigten Werte der Person u in Bedingung 1 und Bedingung 2.

Durchschnittlicher kausaler Effekt

$$ACE(1, 2) = \sum_u ICE_u(1, 2) P(U = u)$$

Erwartungswert der individuellen kausalen Effekte über *alle* Personen in der Population.

Prima-facie-Effekt

$$PFE(1, 2) = E(Y | X=x_1) - E(Y | X=x_2)$$

Die Differenz zweier bedingter Erwartungswerte, deren kausale Interpretation intendiert ist.

Kausale Unverfälschtheit des PFE_{12} in der Gesamtpopulation:

$$PFE(1,2) = ACE(1,2)$$

Hier wird definiert, was die kausale Unverfälschtheit einer Erwartungswertdifferenz bedeutet.

Kausale Unverfälschtheit der Regression und ihrer Werte in der Gesamtpopulation: für jeden Wert x von X gilt:

$$E(Y | X = x) = \sum_u \mu_{x,u} P(U = u)$$

Hier wird definiert, was die kausale Unverfälschtheit einer Regression und ihrer Werte in der Gesamtpopulation bedeutet.



(Z = z)-bedingter kausal unverfälschter Erwartungswert von Y gegeben X = x

$$CUE_{Z=z}(Y \mid X = x)$$

(Z = z)-bedingter durchschnittlicher kausaler Effekt

$$ACE_{Z=z}(1, 2)$$

(Z = z)-bedingter Prima-facie Effekt

$$PFE_{Z=z}(1, 2) = E_{Z=z}(Y \mid X=x_1) - E_{Z=z}(Y \mid X=x_2)$$



C. Theoreme

1. Die bedingte stochastische Unabhängigkeit von X und U gegeben $Z = z$ impliziert die kausale Unverfälschtheit des $(Z = z)$ -bedingten Prima-facie-Effekts

Konditionales Randomisierungstheorem

2. $E_{Z=z}(Y | X, U) = E_{Z=z}(Y | X)$ impliziert die kausale Unverfälschtheit des $(Z = z)$ -bedingten Prima-facie-Effekts.

Konditionales Homogenitätstheorem

3. Gelten für jeden Wert z einer Variablen Z
 - (a) $E_{Z=z}(Y | X)$ ist kausal unverfälscht und
 - (b) $E_{Z=z}(Y | X, U) = E(Y | X, U)$,

dann folgt für jeden Wert x von X : $CUE(Y | X = x) = \sum_z E_{Z=z}(Y | X = x) P(Z = z)$.

Berechnung der kausal unverfälschten bedingten Erwartungswerte



Tabelle 1 Zahlenbeispiel, in dem für jede einzelne Person ein positiver Effekt der Experimentalgruppe gegenüber der Kontrollgruppe besteht und die Wahrscheinlichkeit, der Experimentalbedingung zugewiesen zu werden, abhängig vom Geschlecht der Person ist.

Person	$P(U = u)$	$\mu_{1,u}$	$\mu_{2,u}$	$\mu_{1,u} - \mu_{2,u}$	Geschlecht (Z)	$P(X = x_1 U = u)$	$P(U = u X = x_1)$	$P(U = u X = x_2)$
u_1	1/6	80	68	12	z_1	3/4	3/14	1/10
u_2	1/6	93	81	12	z_1	3/4	3/14	1/10
u_3	1/6	103	89	14	z_1	3/4	3/14	1/10
u_4	1/6	116	102	14	z_1	3/4	3/14	1/10
$CUE_{Z=z_1}(Y X = x)$		98	85	$ACE_{Z=z_1}(1,2)$	13			
$E_{Z=z_1}(Y X = x)$		98	85	$PFE_{Z=z_1}(1,2)$	13			
u_5	1/6	132	123	9	z_2	1/4	1/14	3/10
u_6	1/6	148	137	11	z_2	1/4	1/14	3/10
$CUE_{Z=z_2}(Y X = x)$		140	130	$ACE_{Z=z_2}(1,2)$	10			
$E_{Z=z_2}(Y X = x)$		140	130	$PFE_{Z=z_2}(1,2)$	10			
$CUE(Y X = x)$		112	100	$ACE(1,2)$	12	$P(X = x_1)$	7/12	
$E(Y X = x)$		104	112	$PFE(1,2)$	-8			

Anmerkung. Mit $CUE(Y | X = x)$ bezeichnen wir die unverfälschten Erwartungswerte gegeben $X = x$ und mit $CUE_{Z=z}(Y | X = x)$ die $(Z = z)$ -bedingten kausal unverfälschten Erwartungswerte gegeben $X = x$.