



**Vorlesung**  
**Wahrscheinlichkeit und Regression**  
**WS 2005/06**

**Kapitel 15 & 16**  
**Paradoxa & Individuelle kausale Effekte**

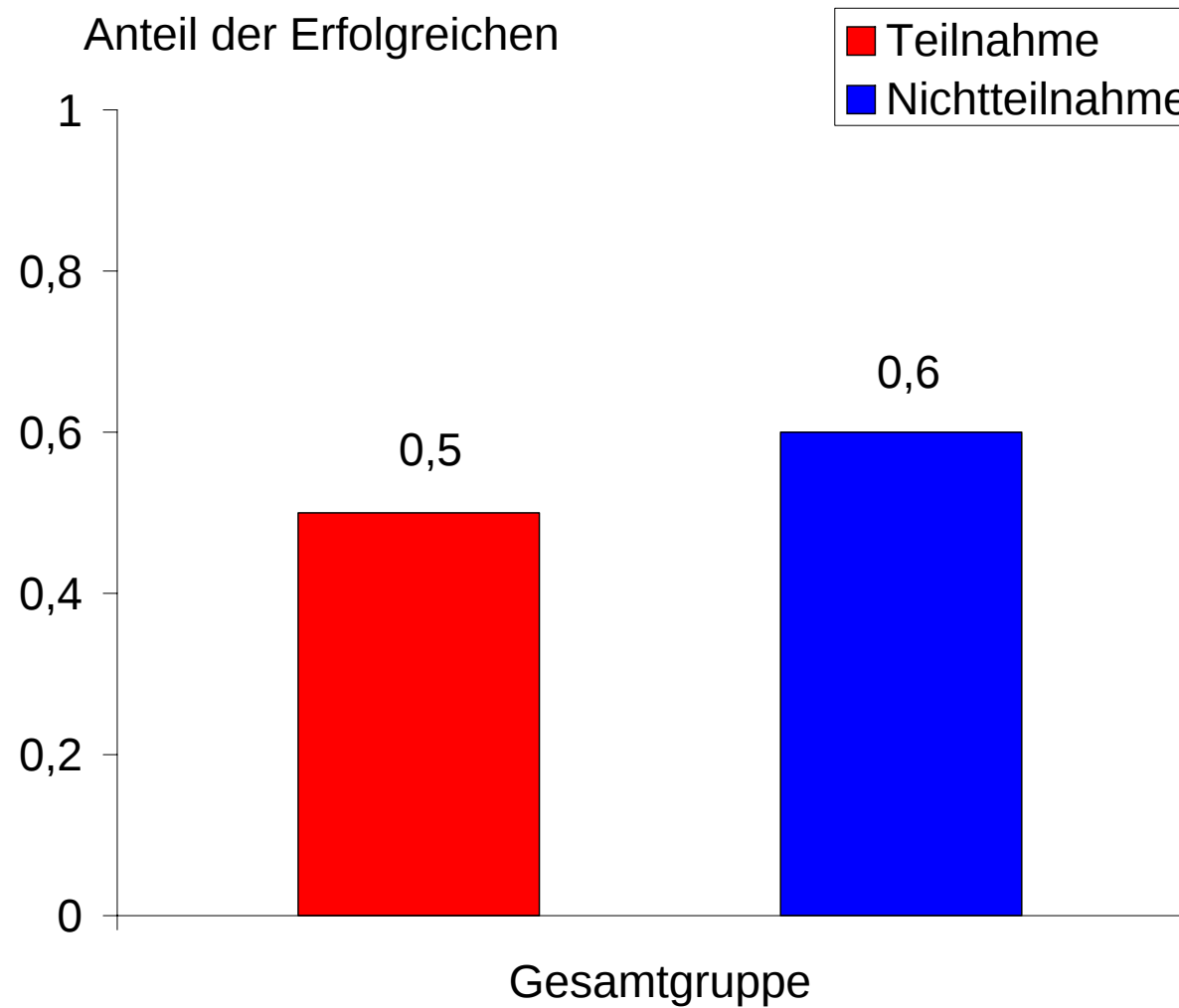
**Prof. Dr. Rolf Steyer**

**Lehrstuhl für Methodenlehre  
und Evaluationsforschung**

**Tabelle 1.** *Evaluation einer Behandlung*

| Erfolg           | Behandlung     |                  | gesamt |
|------------------|----------------|------------------|--------|
|                  | ja ( $X = 1$ ) | nein ( $X = 0$ ) |        |
| ja ( $Y = 1$ )   | 500            | 600              | 1100   |
| nein ( $Y = 0$ ) | 500            | 400              | 900    |
|                  | 1000           | 1000             | 2000   |

*Anmerkungen.* Nach Novick (1980). Die Zahlen sind fiktiv.



**Abbildung 1.** *Histogramm der relativen Häufigkeiten für Erfolg.*



Tabelle 1. *Evaluation einer Behandlung getrennt nach Geschlecht*

**A. Männer ( $W = 1$ )**

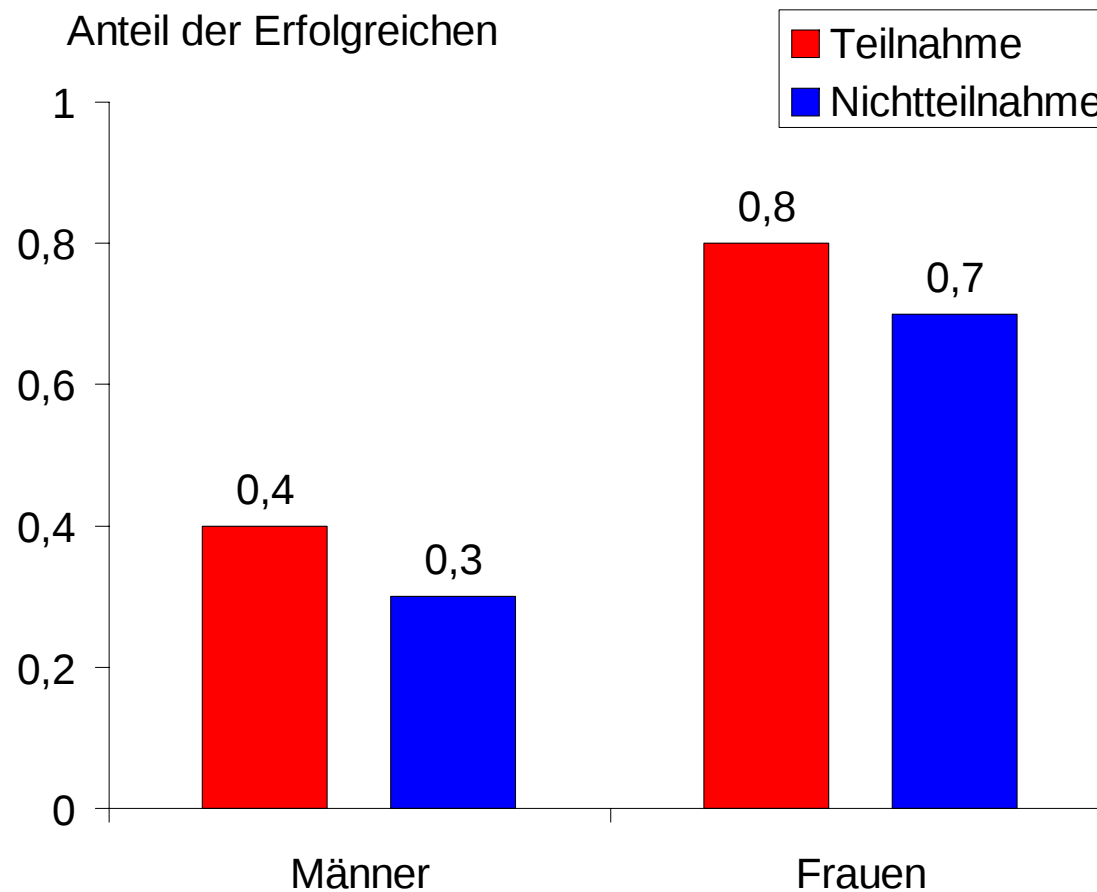
| Erfolg           | Behandlung     |                  | gesamt |
|------------------|----------------|------------------|--------|
|                  | ja ( $X = 1$ ) | nein ( $X = 0$ ) |        |
| ja ( $Y = 1$ )   | 300            | 75               | 375    |
| nein ( $Y = 0$ ) | 450            | 175              | 625    |
|                  | 750            | 250              | 1000   |



## B. Frauen ( $W = 0$ )

| Erfolg           | ja ( $X = 1$ ) | nein ( $X = 0$ ) | gesamt |
|------------------|----------------|------------------|--------|
| ja ( $Y = 1$ )   | 200            | 525              | 725    |
| nein ( $Y = 0$ ) | 50             | 225              | 275    |
|                  | 250            | 750              | 1000   |

*Anmerkungen.* Nach Novick (1980). Die Zahlen sind fiktiv.



**Abbildung 1.** Histogramm der relativen Häufigkeiten für Erfolg, getrennt nach Männern und Frauen.

Tabelle 1. *Zahlenbeispiel zur Veranschaulichung individueller und durchschnittlicher kausaler Effekte*

## (a) Experiment mit nicht vergleichbaren Gruppen

| Person | $\mu_{1,u}$  | $\mu_{0,u}$  | $\mu_{1,u} - \mu_{0,u}$ |
|--------|--------------|--------------|-------------------------|
| $u_1$  | <b>82</b>    | 68           | 14                      |
| $u_2$  | 89           | <b>81</b>    | 8                       |
| $u_3$  | <b>101</b>   | 89           | 12                      |
| $u_4$  | <b>108</b>   | 102          | 6                       |
| $u_5$  | 118          | <b>112</b>   | 6                       |
| $u_6$  | <b>131</b>   | 119          | 12                      |
| $u_7$  | 139          | <b>131</b>   | 8                       |
| $u_8$  | 152          | <b>138</b>   | 14                      |
| Mittel | <b>105.5</b> | <b>115.5</b> | 10                      |

## (b) Experiment mit vergleichbaren Gruppen

| $\mu_{1,u}$ | $\mu_{0,u}$ | $\mu_{1,u} - \mu_{0,u}$ |
|-------------|-------------|-------------------------|
| 82          | <b>68</b>   | 14                      |
| <b>89</b>   | 81          | 8                       |
| <b>101</b>  | 89          | 12                      |
| 108         | <b>102</b>  | 6                       |
| <b>118</b>  | 112         | 6                       |
| 131         | <b>119</b>  | 12                      |
| 139         | <b>131</b>  | 8                       |
| <b>152</b>  | 138         | 14                      |
| <b>115</b>  | <b>105</b>  | 10                      |

Anmerkung. Die fett markierten Werte sind die ausgewählten Werte.



**Tabelle 1.** Zahlenbeispiel, in dem für jede einzelne Person ein positiver Effekt der Experimentalgruppe gegenüber der Kontrollgruppe besteht und die Wahrscheinlichkeit, der Experimentalbedingung zugewiesen zu werden, unabhängig (vorletzte Spalte) bzw. abhängig (letzte Spalte) von der Person ist.

| Person | $\mu_{1,u}$ | $\mu_{0,u}$ | $\mu_{1,u} - \mu_{0,u}$ | $P(X = 1   U=u)$ | $P(X = 1   U=u)$ |
|--------|-------------|-------------|-------------------------|------------------|------------------|
| $u_1$  | 82          | 68          | 14                      | 1/2              | 8/9              |
| $u_2$  | 89          | 81          | 8                       | 1/2              | 7/9              |
| $u_3$  | 101         | 89          | 12                      | 1/2              | 6/9              |
| $u_4$  | 108         | 102         | 6                       | 1/2              | 5/9              |
| $u_5$  | 118         | 112         | 6                       | 1/2              | 4/9              |
| $u_6$  | 131         | 119         | 12                      | 1/2              | 3/9              |
| $u_7$  | 139         | 131         | 8                       | 1/2              | 2/9              |
| $u_8$  | 152         | 138         | 14                      | 1/2              | 1/9              |

*Anmerkung.* Die Wahrscheinlichkeit  $P(U = u)$ , eine der acht Personen zu ziehen, ist  $1/8$  und die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit  $P(X = x)$ , der Experimentalbedingung zugewiesen zu werden, ist  $1/2$ .


**Table 1.** Individual causal effects, equal and unequal treatment probabilities.

| $E(Y \mid X = x) := \sum_u E(Y \mid X = x, U = u) \cdot P(U = u \mid X = x)$ |                                                                    |                                              |                                              |                                                                               |                                                                |                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Person                                                                       | $P(U=u)$<br>sampling probability                                   | $E(Y \mid X = 1, U = u)$<br>Expected outcome | $E(Y \mid X = 0, U = u)$<br>Expected outcome | $E(Y \mid X = 1, U = u) - E(Y \mid X = 0, U = u)$<br>Individual causal effect | $P(X = 1 \mid U = u)$<br>treatment probability in experiment 1 | $P(X = 1 \mid U = u)$<br>treatment probability in experiment 2 |
| $u_1$                                                                        | 1/8                                                                | 82                                           | 68                                           | 14                                                                            | 1/2                                                            | 8/9                                                            |
| $u_2$                                                                        | 1/8                                                                | 89                                           | 81                                           | 8                                                                             | 1/2                                                            | 7/9                                                            |
| $u_3$                                                                        | 1/8                                                                | 101                                          | 89                                           | 12                                                                            | 1/2                                                            | 6/9                                                            |
| $u_4$                                                                        | 1/8                                                                | 108                                          | 102                                          | 6                                                                             | 1/2                                                            | 5/9                                                            |
| $u_5$                                                                        | 1/8                                                                | 118                                          | 112                                          | 6                                                                             | 1/2                                                            | 4/9                                                            |
| $u_6$                                                                        | 1/8                                                                | 131                                          | 119                                          | 12                                                                            | 1/2                                                            | 3/9                                                            |
| $u_7$                                                                        | 1/8                                                                | 139                                          | 131                                          | 8                                                                             | 1/2                                                            | 2/9                                                            |
| $u_8$                                                                        | 1/8                                                                | 152                                          | 138                                          | 14                                                                            | 1/2                                                            | 1/9                                                            |
|                                                                              |                                                                    | Individual causal laws                       |                                              |                                                                               | Good design                                                    | Bad design                                                     |
|                                                                              | Average causal laws:                                               |                                              |                                              |                                                                               |                                                                |                                                                |
|                                                                              | $CUE(Y \mid X = x) = \sum_u E(Y \mid X = x, U = u) \cdot P(U = u)$ |                                              |                                              |                                                                               |                                                                |                                                                |
| Good design implies: $E(Y \mid X = x)$ reflect average causal laws           |                                                                    |                                              |                                              |                                                                               |                                                                |                                                                |
| Bad design implies: $E(Y \mid X = x)$ do not reflect average causal laws     |                                                                    |                                              |                                              |                                                                               |                                                                |                                                                |

**CUE and  $E(Y | X = x)$**



**Tabelle 1.** *Veranschaulichung einer homogenen Population*

| Person | $\mu_{1,u}$ | $\mu_{0,u}$ | $\mu_{1,u} - \mu_{0,u}$ |
|--------|-------------|-------------|-------------------------|
| $u_1$  | 110         | 100         | 10                      |
| $u_2$  | 110         | 100         | 10                      |
| $u_3$  | 110         | 100         | 10                      |
| $u_4$  | 110         | 100         | 10                      |
| $u_5$  | 110         | 100         | 10                      |
| $u_6$  | 110         | 100         | 10                      |
| $u_7$  | 110         | 100         | 10                      |
| $u_8$  | 110         | 100         | 10                      |
| Mittel | <b>110</b>  | <b>100</b>  | <b>10</b>               |



## Box 1. Das Wichtigste zur Theorie individueller und durchschnittlicher kausaler Effekte

### A. Zufallsexperiment und Notation

*Menge der möglichen Ergebnisse*

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_X \times \Omega_Y$$

Charakterisiert das Zufallsexperiment „Ziehe eine Person  $u \in \Omega_U$ , registriere ihre Zuweisung zu einer Bedingung  $\omega_X \in \Omega_X$  und beobachte die Ausprägung  $\omega_Y \in \Omega_Y$ .“

*Personprojektion*

$$U: \Omega \rightarrow \Omega_U$$

Ihr Wert ist die gezogene Person (allgemeiner: Beobachtungseinheit)  $u$ .

*Treatment-Variable*

$$X: \Omega \rightarrow \Omega'_X$$

Ihr Wert repräsentiert die der Person zugewiesene (experimentelle) Bedingung  $\omega_X$ .

*Antwortvariable*

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Die betrachtete „Antwortvariable“, deren Abhängigkeit von  $X$  kausal interpretiert werden soll.

*Regression*

$$E(Y | X)$$

Beschreibt die Abhängigkeit, die kausal interpretiert werden soll.

*Regression*

$$E(Y | X, U)$$

Ihre Werte  $\mu_{X,u} := E(Y | X=x, U=u)$  sind die meßfehlerbereinigten Werte, d. h. die Erwartungswerte der Antwortvariablen  $Y$  einer Person  $u$  in einer (Treatment-)Bedingung  $X = x$ .



## B. Definitionen

*Individueller kausaler Effekt*

$$ICE_u(1, 2) = \mu_{1,u} - \mu_{2,u}$$

Differenz der meßfehlerbereinigten Werte der Person  $u$  in Bedingung 1 und Bedingung 2.

*Durchschnittlicher kausaler Effekt*

$$ACE(1, 2) = \sum_u ICE_u(1, 2) P(U = u)$$

Erwartungswert der individuellen kausalen Effekte über *alle* Personen in der Population.

*Prima-facie-Effekt*

$$PFE(1, 2) = E(Y | X=x_1) - E(Y | X=x_2)$$

Die Differenz zweier bedingter Erwartungswerte, deren kausale Interpretation intendiert ist.

*Kausale Unverfälschtheit des PFE(1, 2) in der Gesamtpopulation:*

$$PFE(1, 2) = ACE(1, 2)$$

Hier wird definiert, was die kausale Unverfälschtheit einer Erwartungswertdifferenz bedeutet.

*Kausal unverfälschter bedingter Erwartungswert*

$$CUE(Y | X = x) = \sum_u \mu_{x,u} P(U = u)$$

Hier wird definiert, was ein kausal unverfälschter bedingter Erwartungswert ist.

*Kausale Unverfälschtheit der Regression und ihrer Werte: für jeden Wert  $x$  von  $X$  gilt:*

$$E(Y | X = x) = CUE(Y | X = x)$$

Hier wird definiert, was die kausale Unverfälschtheit einer Regression und ihrer Werte in der Gesamtpopulation bedeutet.



## C. Theoreme

1. Die stochastische Unabhängigkeit von  $X$  und  $U$  impliziert die kausale Unverfälschtheit des Prima-facie-Effekts in der Gesamtpopulation.  
*Randomisierungstheorem*
2.  $E(Y | X, U) = E(Y | X)$  impliziert die kausale Unverfälschtheit des Prima-facie-Effekts in der Gesamtpopulation.  
*Homogenitätstheorem*