



Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Regression
WS 2005/06

Kapitel 13
Matrizenrechnung

Prof. Dr. Rolf Steyer

**Lehrstuhl für Methodenlehre
und Evaluationsforschung**



Matrizen

Worum geht es in dieser Sitzung?

Definition und Typ einer Matrix

Spezielle Matrizen

Rechenoperationen mit Matrizen

Rang einer Matrix

Rechengesetze

Erwartungswert, Varianz und Kovarianz bei mehrdimensionalen
Zufallsvariablen



Matrix: Definition und Typ I

Eine *Matrix* $\mathbf{A}$ ist definiert als eine geordnete Menge von *Komponenten* a_{ij} mit $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$, die in n Zeilen und m Spalten angeordnet sind. Die Komponenten sind in der Regel reelle Zahlen oder manchmal auch numerische Zufallsvariablen. Besteht die Matrix $\mathbf{A}$ beispielsweise aus zwei Zeilen und drei Spalten, so schreibt man

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} = (a_{ij}),$$

wobei $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$. Im obigen Fall sind $n = 2$ und $m = 3$.

Der *Typ* $n \times m$ einer *Matrix*, gelesen „ n mal m “, gibt die Anzahl ihrer Zeilen und Spalten an. Im obigen Beispiel haben wir es also mit einer (2×3) -Matrix zu tun.



Matrix: Definition und Typ II

Im Allgemeinen lässt sich eine $(n \times m)$ -Matrix $\mathbf{A}$ wie folgt schreiben:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

wobei $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$.



Spezielle Matrizen I

Ein *Vektor* ist eine Matrix, die nur aus einer einzigen Zeile oder einer einzigen Spalte besteht. Ein Vektor heißt *Zeilenvektor*, wenn er als Zeile oder *Spaltenvektor*, wenn er als Spalte aufgeschrieben wird. Eine $(n \times m)$ -Matrix **A** lässt sich in n Zeilen- und m Spaltenvektoren zerlegen.



Spezielle Matrizen II

Besteht die Matrix **A** beispielsweise aus zwei Zeilen und drei Spalten,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

dann sind die zwei Zeilenvektoren $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ bzw. $(a_{21} \ a_{22} \ a_{23})$ und die drei Spaltenvektoren:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}.$$



Spezielle Matrizen III

Eine *symmetrische Matrix* **B** ist eine quadratische Matrix, für deren sämtliche Komponenten $b_{ij} = b_{ji}$ gilt. Die Matrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

bspw. ist eine symmetrische Matrix der Ordnung 3.



Spezielle Matrizen IV

Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix, in der alle Komponenten, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, gleich null sind. Eine solche Matrix ist folglich auch symmetrisch. Die Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bspw. ist eine Diagonalmatrix der Ordnung 4.



Spezielle Matrizen V

Eine *Skalarmatrix* ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalkomponenten sämtlich gleich c sind, wobei c ein Skalar (eine Zahl) ist. Die Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

bspw. ist eine Skalarmatrix der Ordnung 4.

Eine *Einheitsmatrix* ist eine Skalarmatrix mit $c = 1$. Sie wird mit $\mathbf{I}$ bezeichnet. Wir benötigen sie später, um die Inverse einer Matrix zu definieren. Beispiel:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Transposition einer Matrix

Die *Transponierte* $\mathbf{A}'$ der Matrix $\mathbf{A}$ erhält man, indem man die Zeilen von $\mathbf{A}$ als Spalten schreibt und umgekehrt. Transponiert man bspw. die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

so erhält man die Transponierte

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Eine andere Schreibweise für die Transponierte ist übrigens $\mathbf{A}^T$.



Addition und Subtraktion von Matrizen I

Die *Addition* bzw. *Subtraktion* von Matrizen wird über die Addition bzw. Subtraktion der Komponenten der Matrizen definiert. Die Summe bzw. Differenz zweier Matrizen **A** und **B** erhält man komponentenweise, indem man jeweils die Komponenten a_{ij} und b_{ij} addiert bzw. subtrahiert. Allgemein kann man also schreiben:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij}).$$

Beispiele für die Summe und Differenz zweier Matrizen sind:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6 & 8+12 & 9+0 \\ 3+0 & 0+3 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 20 & 9 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+6 & 8-12 & 9-0 \\ 3-0 & 0-3 & 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$



Addition und Subtraktion von Matrizen II

Das *Kommutativ-* und das *Assoziativgesetz* der Addition der reellen Zahlen übertragen sich auf die Matrizenaddition, d.h.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

und

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}).$$



Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die *Multiplikation* einer Matrix $\mathbf{A}$ mit einer reellen Zahl (oder Skalar) c ist definiert:

$$c \cdot \mathbf{A} = c \cdot (a_{ij}) = (c \cdot a_{ij}).$$

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 8 & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 24 & 27 \\ 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Skalarmultiplikation ist *kommutativ* und *assoziativ*, d. h.

$$c \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot c \quad \text{und} \quad c_1 \cdot (c_2 \cdot \mathbf{A}) = (c_1 \cdot c_2) \cdot \mathbf{A}.$$

Die *Division* einer Matrix durch einen Skalar $c \neq 0$ ist natürlich die Multiplikation der Matrix mit dem Reziproken des Skalars. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} / 3 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 8/3 & 3 \\ 1 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation von Matrizen

Das *Produkt* $\mathbf{A}\mathbf{B}$ zweier Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist definiert, wenn die Spaltenzahl von $\mathbf{A}$ gleich der Zeilenzahl von $\mathbf{B}$ ist. Die anderen beiden Typangaben bestimmen den Typ der Ergebnismatrix $\mathbf{A}\mathbf{B}$. Das Produkt $\mathbf{A}\mathbf{B}$ einer $(n \times m)$ -Matrix $\mathbf{A}$ und einer $(m \times p)$ -Matrix $\mathbf{B}$ ist also vom Typ $n \times p$. Zum Berechnen des Produkts geht man komponentenweise wie folgt vor: Die (i, j) -te Komponente der Produktmatrix erhält man, indem man die erste Komponente der i -ten Zeile von $\mathbf{A}$ mit der ersten Komponente der j -ten Spalte von $\mathbf{B}$ miteinander multipliziert, dann die zweiten Komponenten usw. Die Summe der so berechneten m Produkte ergibt das Element in der Zeile i und Spalte j der Produktmatrix. In Summenschreibweise sieht das so aus:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \right).$$



Multiplikation von Matrizen: Beispiel

Multipliziert man bspw. die (2×3) -Matrix **A** mit der (3×2) -Matrix **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 47 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$



Multiplikation von Matrizen: Spezialfall

Die *Assoziativgesetz* ist für die Matrizenmultiplikation erfüllt. Das *Kommutativgesetz* gilt jedoch *nicht*. Letzteres ist sofort ersichtlich, wenn man das Produkt $\mathbf{AB}$ zweier nicht quadratischer Matrizen betrachtet. Dann ist das Produkt $\mathbf{BA}$ nur dann definiert, wenn die Zahl der Spalten von $\mathbf{B}$ mit der Zahl der Zeilen von $\mathbf{A}$ übereinstimmt.

Einen Spezialfall der Matrizenmultiplikation bildet die *Multiplikation* einer Matrix mit der *Einheitsmatrix* entsprechenden Typs. Diese Multiplikation ist kommutativ, und für eine beliebige Matrix $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}.$$

Ist dabei $\mathbf{A}$ nicht quadratisch, so muss $\mathbf{I}$ auf beiden Seiten der Gleichung verschiedenen Typs sein, d. h. wenn $\mathbf{A}$ vom Typ $n \times m$ ist, so muss $\mathbf{I}$ in $\mathbf{AI}$ den Typ $m \times m$ und in $\mathbf{IA}$ den Typ $n \times n$ besitzen.



Inverse Matrix

Die zu einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ *inverse Matrix* $\mathbf{A}^{-1}$ ist definiert als diejenige Matrix, für die gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I},$$

wobei $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix vom selben Typ wie $\mathbf{A}$ ist. Hierbei ist zu beachten, dass eine *inverse Matrix* nur für quadratische Matrizen definiert ist und nicht zu jeder quadratischen Matrix eine Inverse existiert.



Inverse Matrix: Beispiel

Sei bspw. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, dann folgt $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Auch wenn wir das Rechenverfahren, das zur Berechnung von $\mathbf{A}^{-1}$ führt, hier nicht behandeln werden, kann man sich durch Ausmultiplizieren überzeugen, dass $\mathbf{A}^{-1}$ tatsächlich die Inverse von $\mathbf{A}$ ist, denn:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Inverse Matrix: Spezialfall I

Ist die Matrix $\mathbf{A}$ diagonal,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ so folgt } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$



Inverse Matrix: Spezialfall II

Die Inverse einer (2×2) -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

existiert genau dann, wenn $d := a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$. In diesem Fall gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad \textbf{Kramersche Regel}$$



Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ (vom gleichen Typ) heißen *linear unabhängig* genau dann, wenn aus $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ folgt, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reelle Zahlen sind und $\mathbf{0}$ ein Vektor vom gleichen Typ ist wie die Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, dessen Komponenten alle gleich null sind. Andernfalls nennt man $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ *linear abhängig*.

Beispiel: Die beiden Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 84 \\ 91 \\ 119 \\ 161 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 3.9 \\ 5.1 \\ 6.9 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig, weil: $3 \cdot \mathbf{a}_1 - 70 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$.



Rang einer Matrix

Der *Rang* einer Matrix $\mathbf{A}$ ist nun definiert als die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) von $\mathbf{A}$ und wird mit $\text{Rang}(\mathbf{A})$ notiert.

Eine quadratische $(n \times n)$ -Matrix $\mathbf{A}$ mit *vollem Rang*, d. h. mit $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n$, heißt *regulär*. Andernfalls heißt $\mathbf{A}$ *singulär*.



Rang einer Matrix und Invertierbarkeit

Theoreme

- (i) Falls der Rang einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ $n \times n$ gleich n ist, dann existiert die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$. Ist der Rang von $\mathbf{A}$ kleiner als n , dann existiert die Inverse von $\mathbf{A}$ nicht.
- (ii) Wenn $\mathbf{A}$ vom Typ $n \times m$ ist und den Rang m hat, dann existiert die Inverse $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}$ von $\mathbf{A}'\mathbf{A}$. Ist der Rang von $\mathbf{A}$ kleiner m , dann existiert die Inverse $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}$ von $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ nicht.



Rechengesetze I

$$(i) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Assoziativgesetze

$$(ii) \quad c_1 \cdot (c_2 \cdot \mathbf{A}) = (c_1 \cdot c_2) \cdot \mathbf{A}$$

$$(iii) \quad (\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C})$$

$$(iv) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Kommutativgesetze

$$(v) \quad c \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot c$$

Im allgemeinen ist $\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$, aber $Spur(\mathbf{A} \mathbf{B}) = Spur(\mathbf{B} \mathbf{A})$, falls $\mathbf{A}$ vom Typ $n \times m$ und $\mathbf{B}$ vom Typ $m \times n$ sind.



Rechengesetze II

$$(vi) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} + \mathbf{B} \mathbf{C}$$

Distributivgesetze

$$(vii) \quad \mathbf{C} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{B}$$

$$(viii) \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

Gesetze zur Transposition

$$(ix) \quad (\mathbf{A} \mathbf{B})' = \mathbf{B}' \mathbf{A}'$$

$$(x) \quad \mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Multiplikation mit der Einheitsmatrix



Erwartungswert einer multidimensionalen Zufallsvariable I

Seien $X_1, \dots, X_m$ als auch $Y_1, \dots, Y_q$ numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten und Varianzen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, die damit eine *gemeinsame Verteilung* besitzen.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, werden diese Variablen zu den m - bzw. q -dimensionalen Zeilenvektoren $\mathbf{x}' = (X_1 \ \dots \ X_m)$ und $\mathbf{y}' = (Y_1 \ \dots \ Y_q)$ zusammengefasst. Der *Erwartungswert* eines solchen Vektors ist definiert als Vektor der Erwartungswerte seiner einzelnen Komponenten; es gelten also:

$$E(\mathbf{x}') := E((X_1 \ \dots \ X_m)) := [E(X_1) \ \dots \ E(X_m)]$$

$$E(\mathbf{y}') := E((Y_1 \ \dots \ Y_q)) := [E(Y_1) \ \dots \ E(Y_q)].$$



Erwartungswert einer multidimensionalen Zufallsvariable II

Für diese Erwartungswerte gelten folgende Rechenregeln:

- (i) $E(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, falls $\mathbf{x} = \text{const}$ (ein Vektor mit reellen Zahlen).
- (ii) $E(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}) = \mathbf{A} E(\mathbf{x}) + \mathbf{B} E(\mathbf{y})$.



Kovarianzmatrix multidimensionaler Zufallsvariablen I

Die *Kovarianzmatrix* Σ_{xy} , deren Komponenten die Kovarianzen der Variablen $X_1, \dots, X_m$ mit den Variablen $Y_1, \dots, Y_q$ enthält, erhält man auf analoge Weise:

$$\Sigma_{xy} := E([\mathbf{x} - E(\mathbf{x})] [\mathbf{y} - E(\mathbf{y})]'),$$

Man schreibt auch:

$$\Sigma_{xy} = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1 Y_1} & \sigma_{X_1 Y_2} & \cdots & \sigma_{X_1 Y_q} \\ \sigma_{X_2 Y_1} & \sigma_{X_2 Y_2} & \cdots & \sigma_{X_2 Y_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_m Y_1} & \sigma_{X_m Y_2} & \cdots & \sigma_{X_m Y_q} \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma_{X_i Y_j} := \text{Cov}(X_i, Y_j)$.



Kovarianzmatrix multidimensionaler Zufallsvariablen II

Betrachtet man nur eine einzige Variable Y , so ist auch $\mathbf{y} = (Y)$ ein Vektor, der nur eine einzige Komponente, nämlich die Zufallsvariable Y enthält.

Σ_{xy} ist dann eine „einspaltige“ Matrix, d. h. ein Spaltenvektor:

$$\Sigma_{xy} =: \boldsymbol{\sigma}_{xy} = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1 Y} \\ \sigma_{X_2 Y} \\ \vdots \\ \sigma_{X_m Y} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \sigma_{X_i Y} := \text{Cov}(X_i, Y).$$



Varianz-Kovarianzmatrix multidimensionaler Zufallsvariablen

Ein Spezialfall liegt vor, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ gilt. In diesem Fall heißt $\Sigma_{\mathbf{xx}}$ die *Varianz-Kovarianzmatrix*. Es gilt $\Sigma_{\mathbf{xx}} = E([\mathbf{x} - E(\mathbf{x})] [\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]')$ und analog zu den obigen Betrachtungen ist

$$\Sigma_{\mathbf{xx}} := \text{Var}(\mathbf{x}) := \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} & \cdots & \sigma_{X_1 X_m} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2 X_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_m X_1} & \sigma_{X_m X_2} & \cdots & \sigma_{X_m}^2 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalkomponenten der Matrix $\Sigma_{\mathbf{xx}}$ sind die Varianzen der Variablen

$X_1, \dots, X_m$, da $\sigma_{X_i X_i} := \text{Cov}(X_i, X_i) = \text{Var}(X_i) = \sigma_{X_i}^2$ gilt.



Rechenregeln I

Seien $\mathbf{x} = (X_1 \dots X_m)'$, $\mathbf{y} = (Y_1 \dots Y_q)'$, $\mathbf{z} = (Z_1 \dots Z_r)'$ und $\mathbf{w} = (W_1 \dots W_s)'$, wobei die Komponenten dieser Vektoren numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten sind, und seien weiterhin $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Matrizen vom Typ $n \times m$ bzw. $n \times q$ sowie $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ Matrizen vom Typ $m \times r$ bzw. $m \times s$, die alle nur reellwertige Konstanten beinhalten. Dann gelten:

- (i) $\text{Var}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, falls $\mathbf{x} = \text{const}$
- (ii) $\text{Var}(\mathbf{A} \mathbf{x}) := \text{Cov}(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A} \text{Var}(\mathbf{x}) \mathbf{A}'$
- (iii) $\text{Var}(\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{y}) = \mathbf{A} \text{Var}(\mathbf{x}) \mathbf{A}'$, falls $\mathbf{y} = \text{const}$
- (iv) $\text{Var}(\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{y}) = \mathbf{A} \text{Var}(\mathbf{x}) \mathbf{A}' + \mathbf{B} \text{Var}(\mathbf{y}) \mathbf{B}' + \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{B}' + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathbf{A}'$
- (v) $\text{Cov}(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{B} \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, falls $\mathbf{x} = \text{const.}$ oder $\mathbf{y} = \text{const}$
- (vi) $\text{Cov}(\mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{B} \mathbf{y}) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{B}'$



Rechenregeln II

Seien $\mathbf{x} = (X_1 \dots X_m)'$, $\mathbf{y} = (Y_1 \dots Y_q)'$, $\mathbf{z} = (Z_1 \dots Z_r)'$ und $\mathbf{w} = (W_1 \dots W_s)'$, wobei die Komponenten dieser Vektoren numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten sind, und seien weiterhin $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Matrizen vom Typ $n \times m$ bzw. $n \times q$ sowie $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ Matrizen vom Typ $m \times r$ bzw. $m \times s$, die alle nur reellwertige Konstanten beinhalten. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \text{(vii)} \quad \text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}, \mathbf{C}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{w}) &= \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathbf{C}' + \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \mathbf{D}' \\ &\quad + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathbf{C}' + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \mathbf{D}' \end{aligned}$$