



**Vorlesung**  
**Wahrscheinlichkeit und Regression**  
**WS 2005/06**

**Kapitel 12**  
**Bedingte Varianz und Kovarianz**

**Prof. Dr. Rolf Steyer**

**Lehrstuhl für Methodenlehre  
und Evaluationsforschung**



## Bedingte Varianz und Kovarianz

### Worum geht es in dieser Sitzung?

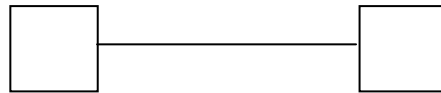
- Beispiel: Baldwin-Täuschung
- Bedingte Varianz und Kovarianz
- Eigenschaften der bedingten Varianz und der bedingten Kovarianz
- Bedingte Korrelationen und Partialkorrelation
- Das Webersche Gesetz für Herstellungsexperimente



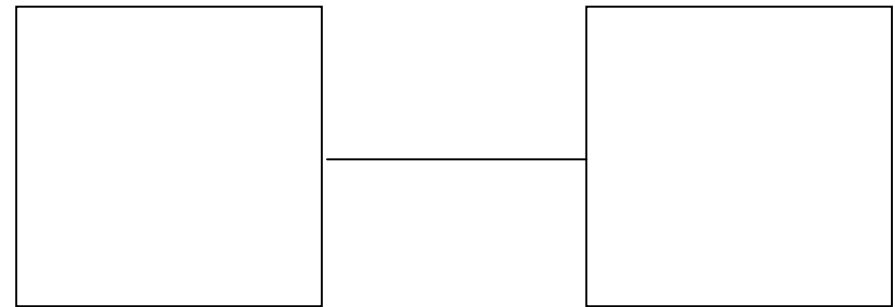
## Beispiel: Baldwin-Täuschung I



(a)  $X = 1$



(b)  $X = 2$



(c)  $X = 3$

**Abbildung 12.1.** Drei Baldwin-Figuren.



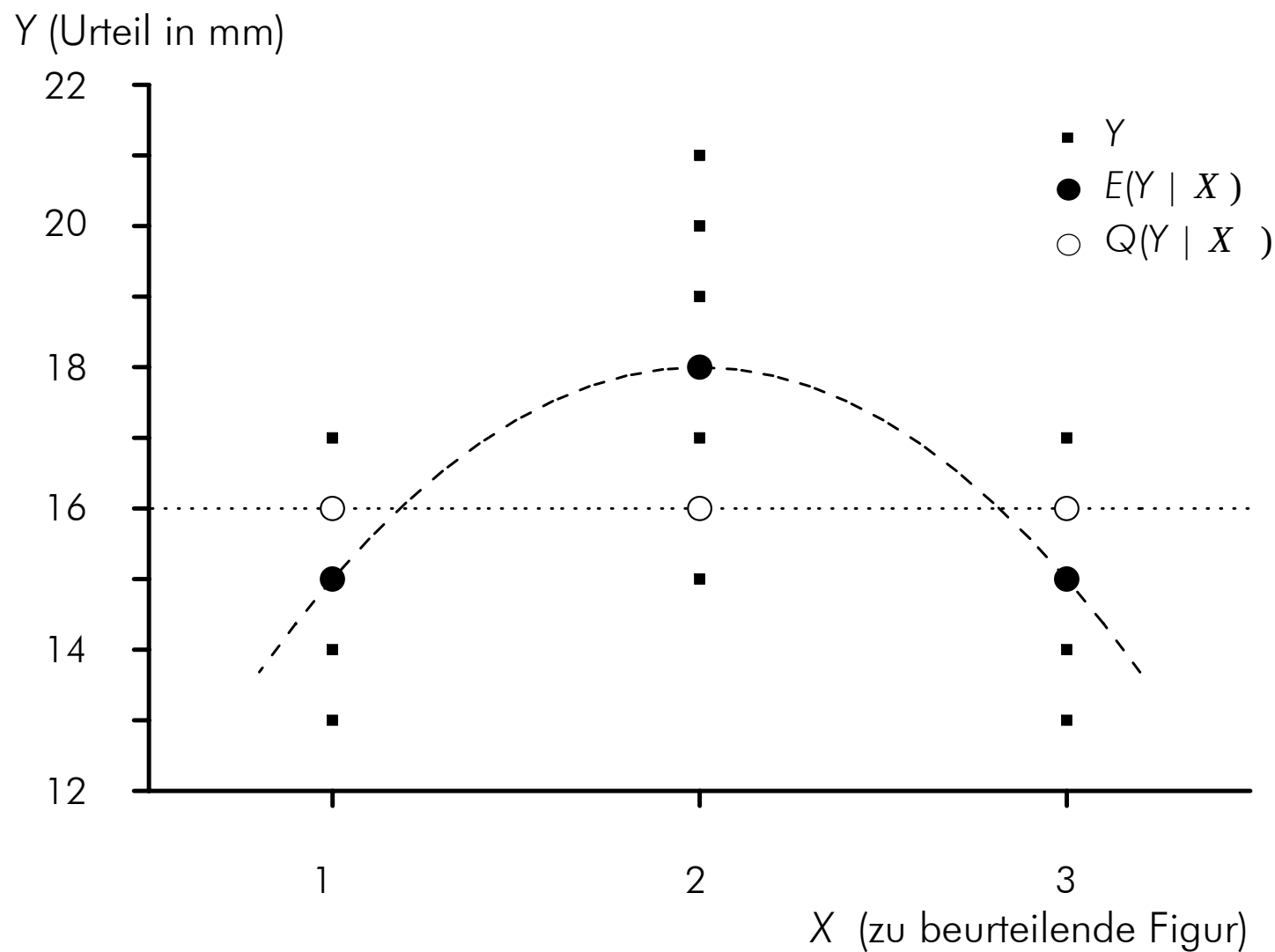
## Beispiel: Baldwin-Täuschung II

**Tabelle 12.1.** Bedingte Verteilungen der Urteile.

| $Y$ (Urteil in mm) | $P(Y = y \mid X = 1)$ | $P(Y = y \mid X = 2)$ | $P(Y = y \mid X = 3)$ |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 13                 | 0,1                   | 0,0                   | 0,1                   |
| 14                 | 0,2                   | 0,0                   | 0,2                   |
| 15                 | 0,4                   | 0,05                  | 0,4                   |
| 16                 | 0,2                   | 0,1                   | 0,2                   |
| 17                 | 0,1                   | 0,2                   | 0,1                   |
| 18                 | 0,0                   | 0,3                   | 0,0                   |
| 19                 | 0,0                   | 0,2                   | 0,0                   |
| 20                 | 0,0                   | 0,1                   | 0,0                   |
| 21                 | 0,0                   | 0,05                  | 0,0                   |



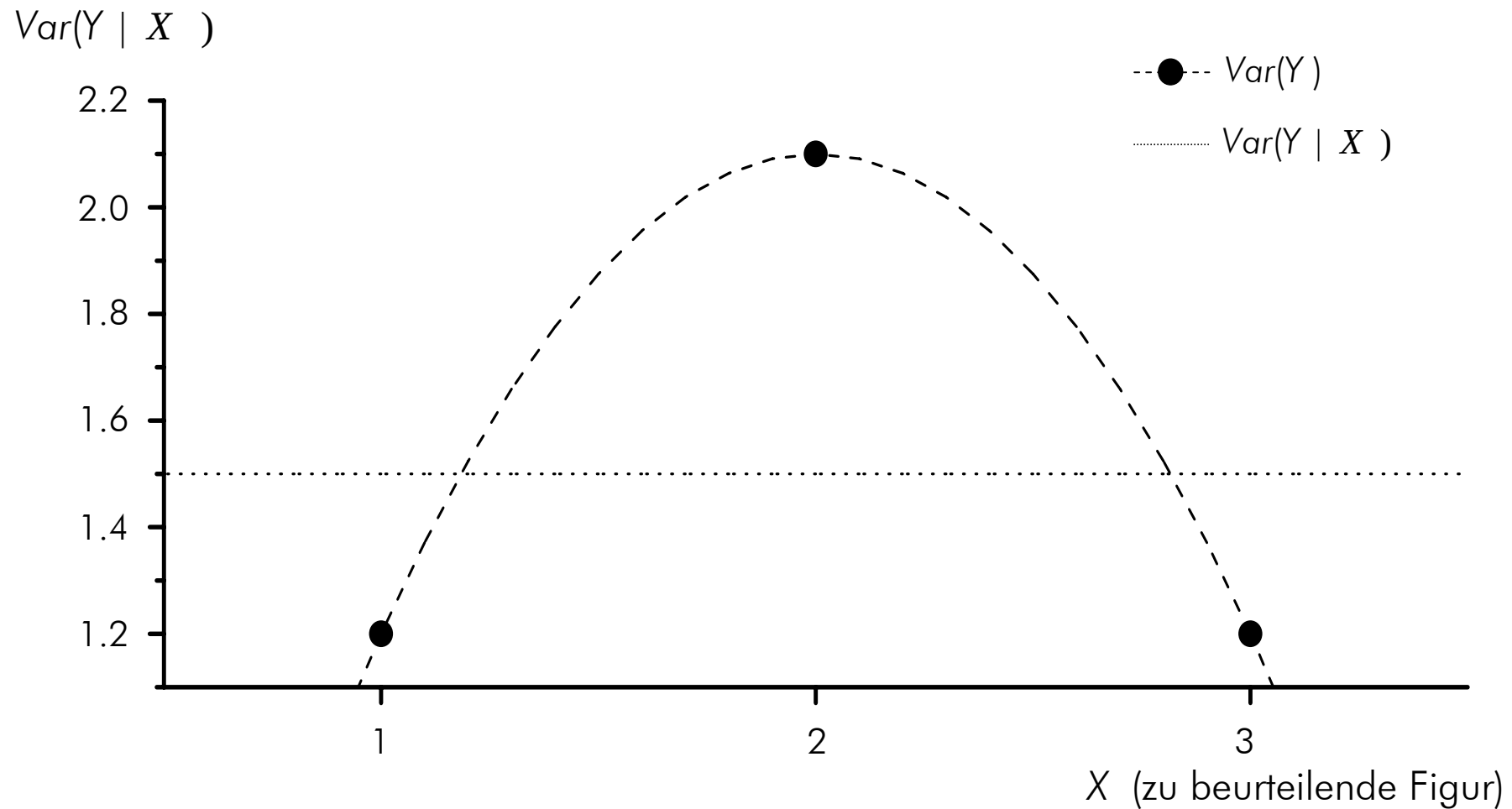
## Baldwin-Täuschung: mögliche Werte



**Abbildung 12.2.** Idealisierte Darstellung der möglichen Werte der Urteilsvariablen Y für die drei zu beurteilenden Figuren.



## Baldwin Illusion: bedingte Varianz



**Abbildung 12.3.** Darstellung der bedingten Varianz der Urteilsvariablen  $Y$  für die drei verschiedenen Werte von  $X$ .



## Bedingte Kovarianz: Definition

**Definition 12.1.** Seien  $Y_1$  und  $Y_2$  zwei numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten und endlichen Varianzen und  $X$  eine (ein- oder mehrdimensionale) Zufallsvariable (mit beliebiger Wertemenge), alle drei auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Außerdem seien:

$$\varepsilon_1 := Y_1 - E(Y_1 | X) \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 := Y_2 - E(Y_2 | X)$$

die Residuen von  $Y_1$  bzw.  $Y_2$  bezüglich ihrer Regression auf  $X$ . Die bedingte Kovarianz von  $Y_1$  und  $Y_2$  gegeben  $X$  ist dann definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2 | X) &:= E\left[\left[Y_1 - E(Y_1 | X)\right] \cdot \left[Y_2 - E(Y_2 | X)\right] \mid X\right] \\ &= E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 | X) \end{aligned}$$



## Bedingte Varianz: Definition

**Definition 12.2.** Seien  $Y$  eine numerische Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz und  $X$  eine (ein- oder mehrdimensionale) Zufallsvariable (mit beliebiger Wertemenge), beide auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Die *bedingte Varianz* von  $Y$  gegeben  $X$  ist dann die bedingte Kovarianz von  $Y$  mit sich selbst. In Formeln:

$$\text{Var}(Y|X) := \text{Cov}(Y, Y|X).$$

Die *bedingte Streuung* oder *bedingte Standardabweichung* von  $Y$  gegeben  $X$  ist definiert durch:

$$\text{Std}(Y|X) := +\sqrt{\text{Var}(Y|X)},$$

d.h. als positive Quadratwurzel aus der bedingten Varianz  $\text{Var}(Y|X)$ .



## Bedingte Varianz: Rechenregeln

$$(i) \quad \text{Var}(Y|X) = E(Y^2 | X) - E(Y|X)^2$$

$$(ii) \quad \text{Var}(Y|X) = 0, \quad \text{falls } Y = \alpha$$

$$(iii) \quad \text{Var}(\alpha + Y|X) = \text{Var}(Y|X)$$

$$(iv) \quad \text{Var}(\alpha \cdot Y|X) = \alpha^2 \text{Var}(Y|X)$$

$$(v) \quad \text{Var}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 | X)$$

$$= \alpha_1^2 \text{Var}(Y_1 | X) + \alpha_2^2 \text{Var}(Y_2 | X) + 2\alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(Y_1, Y_2 | X)$$

$$(vi) \quad \text{Var}[f(X) \cdot Y | X] = f(X)^2 \cdot \text{Var}(Y|X)$$

$$(vii) \quad E[\text{Var}(Y|X)] = \text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon^2)$$



## Bedingte Kovarianz: Rechenregeln

$$(viii) \text{Cov}(Y_1, Y_2 | X) = E(Y_1 \cdot Y_2 | X) - E(Y_1 | X) \cdot E(Y_2 | X)$$

$$(ix) \text{Cov}(Y_1, Y_2 | X) = 0, \text{ falls } Y_1 = \alpha \text{ oder } Y_2 = \alpha$$

$$(x) \text{Cov}(\alpha_1 + Y_1, \alpha_2 + Y_2 | X) = \text{Cov}(Y_1, Y_2 | X)$$

$$(xi) \text{Cov}(\alpha_1 Y_1, \alpha_2 Y_2 | X) = \alpha_1 \alpha_2 \text{Cov}(Y_1, Y_2 | X)$$

$$(xii) \text{Cov}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2, \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 | X) \\ = \alpha_1 \beta_1 \text{Cov}(Y_1, Z_1 | X) + \alpha_1 \beta_2 \text{Cov}(Y_1, Z_2 | X) \\ + \alpha_2 \beta_1 \text{Cov}(Y_2, Z_1 | X) + \alpha_2 \beta_2 \text{Cov}(Y_2, Z_2 | X)$$

$$(xiii) \text{Cov}[f_1(X) \cdot Y_1, f_2(X) \cdot Y_2 | X] = f_1(X) \cdot f_2(X) \cdot \text{Cov}(Y_1, Y_2 | X)$$

$$(xiv) E[\text{Cov}(Y_1, Y_2 | X)] = \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = E(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)$$



## Bedingte Korrelation: Definition

**Definition 12.3.** Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 12.1. ist die *bedingte Korrelationsfunktion* zweier numerischer Zufallsvariablen  $Y_1$  und  $Y_2$  gegeben  $X$  definiert durch:

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 | X) := \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2 | X)}{\text{Std}(Y_1 | X) \cdot \text{Std}(Y_2 | X)},$$

und die *bedingte Korrelation* gegeben  $X = x$  durch:

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 | X = x) := \frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2 | X = x)}{\text{Std}(Y_1 | X = x) \text{Std}(Y_2 | X = x)}.$$



## Partialkorrelation: Definition

**Definition 12.3.** Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 12.1 ist die *Partialkorrelation* zweier numerischer Zufallsvariablen  $Y_1$  und  $Y_2$  bzgl.  $X$  definiert durch

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 . X) := \frac{\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\text{Std}(\varepsilon_1) \cdot \text{Std}(\varepsilon_2)},$$

wobei  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , das Residuum bzgl. der Regression  $E(Y_i | X)$  ist.



## Partialkorrelation: Theorem

**Theorem 12.1.** Für die Partialkorrelation zweier numerischer Zufallsvariablen  $Y_1$  und  $Y_2$  bzgl.  $X$  gilt:

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 \cdot X) = \frac{\text{Kor}(Y_1, Y_2) - R_{Y_1|X} R_{Y_2|X} \text{Kor}[E(Y_1 | X), E(Y_2 | X)]}{\sqrt{1 - R_{Y_1|X}^2} \cdot \sqrt{1 - R_{Y_2|X}^2}}.$$

Dabei bezeichnen  $R_{Y_1|X}^2$  und  $R_{Y_2|X}^2$  die Determinationskoeffizienten der beiden Regressionen  $E(Y_i | X)$ . Im Fall, dass die Regressionen  $E(Y_i | X) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}X$ ,  $i = 1, 2$ , linear sind, gilt auch:

$$\text{Kor}(Y_1, Y_2 \cdot X) = \frac{\text{Kor}(Y_1, Y_2) - \text{Kor}(Y_1, X) \cdot \text{Kor}(Y_2, X)}{\sqrt{1 - \text{Kor}(Y_1, X)^2} \cdot \sqrt{1 - \text{Kor}(Y_2, X)^2}}.$$