



Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Regression
WS 2005/06

Kapitel 5
Erwartungswert, Varianz, Kovarianz
und Korrelation

Prof. Dr. Rolf Steyer

Lehrstuhl für Methodenlehre
und Evaluationsforschung



Erwartungswert: Definition

Definition 5.1

Sei X eine reelle Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ mit endlich vielen Werten $x_1, \dots, x_n$.

Dann heißt die Zahl

$$E(X) := \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

der *Erwartungswert* von X (bezüglich P).



Erwartungswert: Spezialfall

Im Spezialfall, in dem alle Werte von X mit gleicher Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i) = 1/n$ auftreten (s. Def. 5.1), vereinfacht sich die Definition des Erwartungswerts zu

$$E(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



Beispiel: Einmaliger Münzwurf

X sei die *Augenzahl*, die der Würfel nach dem Werfen zeigt. Dann gilt für den Erwartungswert $E(X)$ von X :

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = (1 + 2 + \dots + 6) \cdot \frac{1}{6} = 3.5.$$



Beispiel: Erwartungswert einer Indikatorvariablen

Sei Y eine Zufallsvariable, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann (z. B. für ungerade vs. gerade Augenzahl beim Würfeln). Dann gilt

$$E(Y) = 0 \cdot P(Y = 0) + 1 \cdot P(Y = 1) = P(Y = 1).$$

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, ist also gleich der Wahrscheinlichkeit $P(Y = 1)$, dass Y den Wert 1 annimmt.



Erwartungswert: Rechenregeln

Sind X und Y numerische Zufallsvariablen auf $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ mit endlichen

Erwartungswerten sowie α und $\beta \in \mathbb{R}$, dann gelten:

(i) $E(\alpha) = \alpha$

(ii) $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

(iii) $E(\alpha \cdot X + \beta \cdot Y) = \alpha \cdot E(X) + \beta \cdot E(Y)$



Varianz und Standardabweichung: Definition

Definition 5.2

Sei X eine numerische Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ mit endlichem Erwartungswert. Dann heißt die Zahl

$$\text{Var}(X) := E \left[(X - E(X))^2 \right]$$

die *Varianz* von X (bezüglich P) und ihre positive Quadratwurzel

$$\text{Std}(X) := \sqrt{\text{Var}(X)}$$

die *Streuung* oder die *Standardabweichung* von X (bezüglich P).



Varianz: Rechenregeln

$$(i) \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$(ii) \quad \text{Var}(X) = 0, \quad \text{falls } X = \alpha$$

Ist X eine numerische Zufallsvariable auf $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ mit endlichem

Erwartungswert und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gelten:

$$(iii) \quad \text{Var}(\alpha \cdot X) = \alpha^2 \cdot \text{Var}(X)$$

$$(iv) \quad \text{Var}(\alpha + X) = \text{Var}(X)$$



Varianz einer Differenzvariablen

$$(v) \quad \text{Var}(\alpha \cdot X + \beta \cdot Y) = \alpha^2 \cdot \text{Var}(X) + \beta^2 \cdot \text{Var}(Y) + 2 \alpha \beta \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

Für die Differenz $X_1 - X_2$ *unkorrelierter* [d. h. $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$] numerische Zufallsvariablen folgt aus Regel (v) (mit $\alpha = 1$ und $\beta = -1$):

$$\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2).$$

Allgemein gilt:

$$\text{Var}(X_1 - X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) - 2 \text{Cov}(X_1, X_2).$$



Kovarianz: Definition

Definition 5.3

Seien X und Y numerische Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$. Dann heißt die Zahl

$$\text{Cov}(X, Y) := E\left[\left[X - E(X)\right] \cdot \left[Y - E(Y)\right]\right]$$

die *Kovarianz* von X und Y (bezüglich P).



Korrelation als Erwartungswert des Produkts z-transformierter Variablen

Der Erwartungswert

$$Kor(X, Y) := E \left[\frac{X - E(X)}{Std(X)} \cdot \frac{Y - E(Y)}{Std(Y)} \right]$$

des Produkts der *standardisierten* Abweichungsvariablen

$$[X - E(X)] / Std(X) \quad \text{und} \quad [Y - E(Y)] / Std(Y),$$

heißt *Korrelation* von X und Y . Dabei setzen wir natürlich

$Std(Y)$ und $Std(X) > 0$ voraus.

Ist eine oder sind gar beide Standardabweichungen gleich null, definieren wir
 $Kor(X, Y) := 0$.



Korrelation: Definition

Definition 5.4

Seien X und Y numerische Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ mit endlichen Erwartungswerten und positiven Standardabweichungen. Dann heißt die Zahl

$$\text{Kor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Std}(X) \cdot \text{Std}(Y)}$$

die *Korrelation* von X und Y (bezüglich P). Ist eine der Standardabweichungen gleich null, so definieren wir $\text{Kor}(X, Y) = 0$.



Lineare Quasi-Regression

Kovarianz und Korrelation charakterisieren nur die Stärke eines bestimmten Aspekts der stochastischen Abhängigkeit zwischen zwei numerischen Zufallsvariablen. Dabei geht es darum, inwieweit eine *lineare Abhängigkeit* zwischen diesen beiden Variablen besteht, die sich, bis auf eine *Fehler-* oder *Residualvariable* ν , durch eine lineare Funktion von X , beschreiben lässt:

$$(1) \quad Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + \nu$$

Die Koeffizienten α_0 und α_1 sind eindeutig bestimmt, wenn für die Residualvariable ν gelten:

$$(2) \quad \text{Cov}(X, \nu) = 0 \quad \text{und} \quad (3) \quad E(\nu) = 0.$$

Die Funktion $\alpha_0 + \alpha_1 X$ mit den Eigenschaften (1) bis (3) heißt *lineare Quasi-Regression*.



Lineare Quasi-Regression: Kleinst-Quadrat-Kriterium

Eine alternative, mit diesen Gleichungen völlig äquivalente Definition ist, als lineare Quasi-Regression von Y auf X diejenige lineare Funktion von X zu definieren, die folgende Funktion der reellen Zahlen a_0 und a_1 minimiert:

$$LS(a_0, a_1) = E[(Y - (a_0 + a_1 \cdot X))^2]$$



Kovarianzen: Rechenregeln I

Sind X und Y numerische Zufallsvariablen auf $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ mit endlichen Erwartungswerten sowie α und $\beta \in \mathbb{R}$, dann gelten:

- i) $\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$
- ii) $\text{Cov}(X, Y) = 0$, falls $X = \alpha$
- iii) $\text{Cov}(\alpha X, \beta Y) = \alpha \beta \text{Cov}(X, Y)$
- iv) $\text{Cov}(\alpha + X, \beta + Y) = \text{Cov}(X, Y)$



Kovarianzen: Rechenregeln II

Sind X_1, X_2, Y_1 und Y_2 numerische Zufallsvariablen auf $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ mit endlichen

Erwartungswerten und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, dann gelten:

$$\begin{aligned} \text{v) } \text{Cov}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2) &= \\ &= \alpha_1 \beta_1 \text{Cov}(X_1, Y_1) + \alpha_1 \beta_2 \text{Cov}(X_1, Y_2) \\ &\quad + \alpha_2 \beta_1 \text{Cov}(X_2, Y_1) + \alpha_2 \beta_2 \text{Cov}(X_2, Y_2) \end{aligned}$$



Korrelationen: Rechenregeln

$$\text{Kor}(X, Y) = 0, \text{ falls } X = \alpha$$

$$\text{Kor}(\alpha X, \beta Y) = \text{Kor}(X, Y)$$

$$\text{Kor}(\alpha + X, \beta + Y) = \text{Kor}(X, Y)$$

$$\text{Kor}(\alpha_0 + \alpha_1 X, \beta_0 + \beta_1 Y) = \text{Kor}(X, Y)$$



Numerisches Beispiel zur Berechnung einer Kovarianz

X	Y	$P(X = x, Y = y)$	$X - E(X)$	$Y - E(Y)$	$[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]$
0	0	5/40	-32/40	-15/40	48/160
0	1	3/40	-32/40	25/40	-80/160
1	0	20/40	8/40	-15/40	-12/160
1	1	12/40	8/40	25/40	20/160

$$E(X) = 0 \cdot 8/40 + 1 \cdot 32/40 = 32/40 \quad E(Y) = 0 \cdot 25/40 + 1 \cdot 15/40 = 15/40.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]] \\ &= (48/160) \cdot 5/40 + (-80/160) \cdot 3/40 + (-12/160) \cdot 20/40 + (20/160) \cdot 12/40 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die beiden Variablen X und Y haben also in diesem Beispiel die Kovarianz 0,
d. h. sie sind unkorreliert.



Erwartungswert: Allgemeine Definition

Definition 5.5

Sei X eine numerische Zufallsvariable auf dem W-Raum $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$ und P^X ihre Verteilung. $E(X)$ heißt der *Erwartungswert* von X (hinsichtlich P), wenn

$$E(X) := \int x P^X(dx).$$



Herleiten der Rechenregel (ii) des Erwartungswertes

$$E(X) := \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) \quad | \text{ Formel des Erwartungswertes}$$

$$E(\alpha \cdot X) = \sum_{i=1}^n \alpha \cdot x_i \cdot P(\alpha X = \alpha x_i) \quad | \ P(\alpha X = \alpha x_i) = P(X = x_i)$$

$$E(\alpha \cdot X) = \alpha \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i) \quad | \ \alpha \text{ ausgeklammert}$$

w.z.b.w.



Herleitung Rechenregel (i) der Varianz

$$\text{Var}(X) := E\left[\left[X - E(X)\right]^2\right]$$

$$\text{Var}(X) = E\left[\left[X - E(X)\right] \cdot \left[X - E(X)\right]\right]$$

$$\text{Var}(X) = E\left[X^2 - X \cdot E(X) - E(X) \cdot X + E(X)^2\right]$$

$$\text{Var}(X) = E\left[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right]$$

$$\text{Var}(X) = 1 \cdot E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E[E(X)] + E(X)^2$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$

da $E[E(X)] = E(X)$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \text{w.z.b.w.}$$