



Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Regression
WS 2005/06

Kapitel 4
Zufallsvariablen

Prof. Dr. Rolf Steyer

**Lehrstuhl für Methodenlehre
und Evaluationsforschung**



Zufallsvariablen: Vorläufige Definition

Eine Zufallsvariable ist eine Abbildung $X: \Omega \rightarrow \Omega'$, die eine Wahrscheinlichkeitsverteilung hat.



Zufallsvariablen: Ein erstes Beispiel

Beispiel 1: Einfacher Würfelwurf

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

$$\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$X(\omega_i) = i, \quad i = 1, \dots, 6$. Dies ist die Zufallsvariable „Augenzahl“.



Zufallsvariablen: Weitere Beispiele

Beispiel 2: Psychologischer Leistungstest (Ziehen einer Person und Bearbeitung zweier Aufgaben)

$$\Omega = \Omega_U \times \{+, -\} \times \{+, -\}$$

$$\Omega' = \{0, 1, 2\}$$

$$Y_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls die 1. Aufgabe gelöst wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$Y_2(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls die 2. Aufgabe gelöst wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$S(\omega)$ = Anzahl der gelösten Aufgaben



Zufallsvariablen: Urbild

Urbild einer Menge $A' \subset \Omega'$ unter einer Abbildung $X: \Omega \rightarrow \Omega'$:

$$X^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A'\}.$$

$$\Omega = \Omega_U \times \{+, -\} \times \{+, -\}$$

$$\Omega' = \{0, 1, 2\}$$

$$Y_1(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls die 1. Aufgabe gelöst wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $A' = \{1\}$ ist das Urbild unter $Y_1(A')$ die Menge

$$Y_1^{-1}(A') = \Omega_U \times \{+\} \times \{+, -\}.$$



Urbild: Beispiel

Beispiel des einfachen Münzwurfes

$$\Omega = \{K, Z\}, \mathfrak{A} = P(\Omega)$$

$$X : \Omega \rightarrow \{0, 1\}, X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega = K \\ 1, & \text{falls } \omega = Z \end{cases}$$

$$\Omega' = \{0, 1\}, \mathfrak{A}' = \{\emptyset, \Omega', \{0\}, \{1\}\}$$

Welches sind hier Urbilder $X^{-1}(A')$ für alle Teilmengen $A' \in \mathfrak{A}'$?



Zufallsvariablen: Definition

Definition 4.1

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein W-Raum, Ω' eine Menge und $\mathfrak{A}'$ eine σ -Algebra auf Ω' . Eine Abbildung $X: \Omega \rightarrow \Omega'$ heißt *Zufallsvariable*, wenn für das Urbild $X^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A'\}$ von jedem $A' \in \mathfrak{A}'$ gilt: $X^{-1}(A') \in \mathfrak{A}$. Die Menge aller Urbilder $X^{-1}(A')$ heißt die von X *erzeugte σ -Algebra*.



Zufallsvariablen: Arten

Definition 4.2

Sei $X: \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Zufallsvariable auf $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$.

- (i) Ist die Menge $X(\Omega)$ der Werte von X höchstens abzählbar unendlich, so heißt X *diskret*.
- (ii) Ist $\Omega' \subset \mathbb{R}$, so heißt X *reell* oder *reellwertig*.
- (iii) Gilt $\Omega' \subset \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, so heißt X *numerisch*.
- (iv) Ist $\Omega' \subset \overline{\mathbb{R}}$ und ist die Menge $X(\Omega)$ der Werte von X nicht endlich und nicht abzählbar unendlich, dann heißt X *stetig*.



Zufallsvariablen: Verteilung

Definition 4.3

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein W-Raum, $X: \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Zufallsvariable auf $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ und $\mathfrak{A}'$ eine σ -Algebra auf Ω' . Dann heißt die durch

$$P^X(A') := P[X^{-1}(A')], \quad \text{für alle } A' \in \mathfrak{A}',$$

definierte Funktion $P^X: \mathfrak{A}' \rightarrow \mathbb{R}$ *Verteilung* von X (hinsichtlich P).



Zufallsvariablen: kumulative Verteilung

Definition 4.4

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein W-Raum, $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Zufallsvariable auf $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ und $\mathfrak{B}$ die Borelsche σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$. Die durch

$$F^X(\alpha) := P^X([-\infty, \alpha]), \quad \alpha \in \overline{\mathbb{R}},$$

definierte Funktion $F^X: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt dann die *kumulative Verteilung* oder die *Verteilungsfunktion* von X (hinsichtlich P).



Zufallsvariablen: Unabhängigkeit

Definition 4.5

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein W-Raum, $X: \Omega \rightarrow \Omega'_X$ und $Y: \Omega \rightarrow \Omega'_Y$ Zufallsvariablen, $\mathfrak{A}'_X$ eine σ -Algebra auf Ω'_X und $\mathfrak{A}'_Y$ eine σ -Algebra auf Ω'_Y .

Dann heißen X und Y (stochastisch) *unabhängig* (hinsichtlich P), wenn für alle $(A', B') \in \mathfrak{A}'_X \times \mathfrak{A}'_Y$ gilt:

$$P [X^{-1}(A') \cap Y^{-1}(B')] = P [X^{-1}(A')] \cdot P [Y^{-1}(B')].$$

Andernfalls heißen X und Y (stochastisch) *abhängig*.