



Vorlesung
Wahrscheinlichkeit und Regression
WS 2005/06

Kapitel 3
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Prof. Dr. Rolf Steyer

**Lehrstuhl für Methodenlehre
und Evaluationsforschung**



Bedingte Wahrscheinlichkeit 1

Definition 3.1

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathfrak{A}$ und $P(B) > 0$.

Die Zahl

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gegeben das Ereignis B (kurz: B -bedingte Wahrscheinlichkeit von A).



Bedingte Wahrscheinlichkeit 2

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

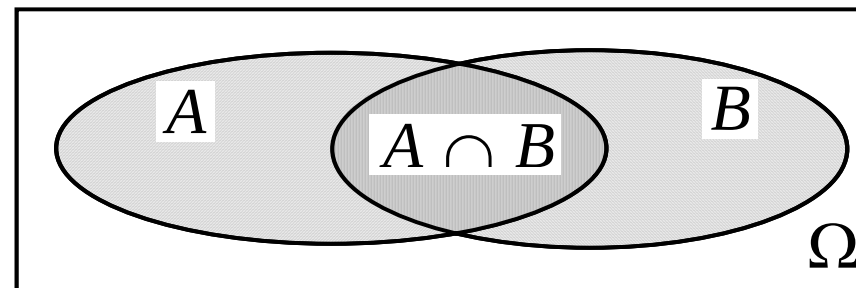


Abbildung 3.1. Veranschaulichung der bedingten Wahrscheinlichkeit durch ein Venn-Diagramm.



Unabhängigkeit zweier Ereignisse 1

Definition 3.3

Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ heißen *unabhängig* hinsichtlich des

Wahrscheinlichkeitsmaßes P (kurz: *P-unabhängig*), wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



Bedingte Wahrscheinlichkeit 3

Definition 3.2

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A, B \in \mathfrak{A}$ und $P(B) > 0$. Dann heißt die durch

$$P_B(A) := P(A|B), \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A},$$

definierte reelle Funktion $P_B: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ das (zu P gehörige) *B-bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathfrak{A}$.



Unabhängigkeit zweier Ereignisse 2

Theorem 3.1

Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wenn $A, B \in \mathfrak{A}$ und $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$, dann sind die Ereignisse A und B *unabhängig*.



Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen

Definition 3.4

Sei $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Ereignisse $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ heißen *unabhängig* hinsichtlich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P (kurz: *P-unabhängig*) genau dann, wenn

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_m})$$

für alle $\{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Gilt diese Gleichung nicht, dann heißen die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ *stochastisch abhängig*.



Faktorisierungssatz (speziell)

Für zwei Ereignisse A_1 und A_2 gilt:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) .$$

Für drei Ereignisse A_1 , A_2 und A_3 gilt:

$$\begin{aligned} P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3] &= P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$



Faktorisierungssatz (allgemein)

Theorem 3.2

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ Ereignisse.

Ist $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, dann gilt:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$



Satz der totalen Wahrscheinlichkeit 1

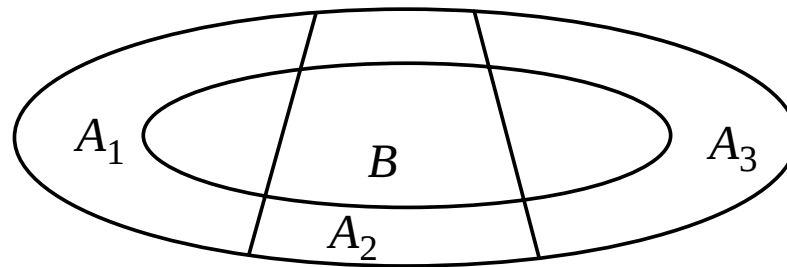


Abbildung 3.2. Venn-Diagramm zur Veranschaulichung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.



Satz der totalen Wahrscheinlichkeit 2

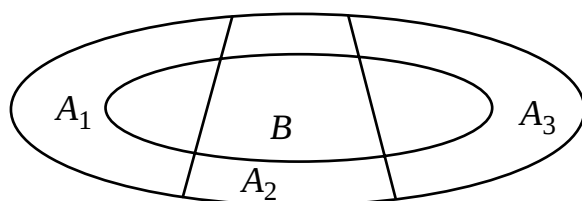


Abbildung 3.2. Venn-Diagramm zur Veranschaulichung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Theorem 3.3 (i)

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(A_i) > 0, i = 1, \dots, n$. Weiter sei $B \subset A_1 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n$.

Dann folgt:

$$(i) \quad P(B) = P(B \cap A_1) + \dots + P(B \cap A_i) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_i) \cdot P(A_i) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$



Bayes Theorem

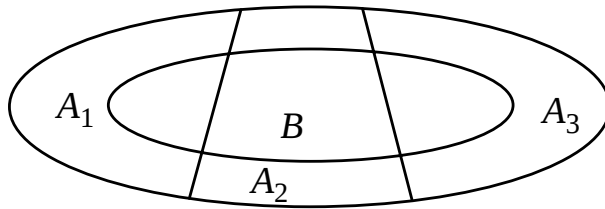


Abbildung 3.2. Venn-Diagramm zur Veranschaulichung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Theorem 3.3 (ii)

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $P(A_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$. Weiter sei $B \subset A_1 \cup \dots \cup A_i \cup \dots \cup A_n$.

Dann folgt:

$$(ii) \quad P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_i) \cdot P(A_i) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}.$$