



Vorlesung

Wahrscheinlichkeit und Regression

WS 2005/06

Kapitel 2

Wahrscheinlichkeit

Prof. Dr. Rolf Steyer

**Lehrstuhl für Methodenlehre
und Evaluationsforschung**



Teil I: Wahrscheinlichkeitstheorie

Kapitel 2. Wahrscheinlichkeit (wird heute behandelt)

Kapitel 3: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Kapitel 4: Zufallsvariablen

Kapitel 5: Erwartungswerte, Varianz, Kovarianz und
Korrelation



Kapitel 2. Wahrscheinlichkeit

Überblick

Beispiele

Wahrscheinlichkeitsraum

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit



Beispiele

Beispiel 1: Würfelwurf

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$$

Beispiel 2: zweifacher Münzwurf

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

Beispiel 3: Psychologisches Testen

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$$

Beispiel 4: Ein typisches psychologisches Experiment

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_X \times \Omega_Y$$



Wahrscheinlichkeitsraum

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* repräsentiert das beobachtete Zufallsexperiment. Er besteht aus den folgenden drei Komponenten

Menge der möglichen Ergebnisse des betrachteten Zufallsexperiments

Menge der möglichen Ereignisse und

Wahrscheinlichkeitsmaß



Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis und Wahrscheinlichkeit

Der Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ repräsentiert das betrachtete

Zufallsexperiment. Dabei sind:

- Ω die *Menge aller möglichen Ergebnisse* eines Zufallsexperiments
- $\mathfrak{A}$ die *Menge aller möglichen Ereignisse* $A \subset \Omega$ und
- $P: \mathfrak{A} \rightarrow [0, 1]$ das *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathfrak{A}$



Die Menge der möglichen Ergebnisse

Beispiel 1: Würfelwurf

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$$

Beispiel 2: zweifacher Münzwurf

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

Beispiel 3: psychologisches Testen

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$$



Die Menge der möglichen Ereignisse: Beispiel 1

Mögliche Ereignisse sind immer Teilmengen der Menge der möglichen Ergebnisse Ω

Beispiel 1 (zweifacher Münzwurf):

$$\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega, \{(K, K)\}, \{(K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}\}$$



Die Menge der möglichen Ereignisse: Beispiel 2

zweifacher Münzwurf

Die Menge aller Teilmengen von Ω

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} := & \left\{ \emptyset, \Omega, \{\langle Z, Z \rangle\}, \{\langle Z, K \rangle\}, \{\langle K, Z \rangle\}, \{\langle K, K \rangle\}, \right. \\ & \{\langle Z, Z \rangle, \langle Z, K \rangle\}, \{\langle Z, Z \rangle, \langle K, Z \rangle\}, \{\langle Z, Z \rangle, \langle K, K \rangle\}, \\ & \{\langle Z, K \rangle, \langle K, Z \rangle\}, \{\langle Z, K \rangle, \langle K, K \rangle\}, \{\langle K, Z \rangle, \langle K, K \rangle\}, \\ & \{\langle Z, Z \rangle, \langle Z, K \rangle, \langle K, Z \rangle\}, \{\langle Z, Z \rangle, \langle Z, K \rangle, \langle K, K \rangle\}, \\ & \left. \{\langle Z, Z \rangle, \langle K, Z \rangle, \langle K, K \rangle\}, \{\langle Z, K \rangle, \langle K, Z \rangle, \langle K, K \rangle\} \right\} \end{aligned}$$



Einige mögliche Ereignisse beim psychologischen Testen: Beispiel

Tabelle 2.1.

Einige Ereignisse und ihre formalsprachliche Darstellung

Inhaltliches Ereignis	Formale Darstellung als Teilmenge von $\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$
Fritz wird gezogen	$\{\text{Fritz}\} \times \Omega_O$
Fritz oder Franz werden gezogen	$\{\text{Fritz}, \text{Franz}\} \times \Omega_O$
Die erste Aufgabe wird gelöst	$\Omega_U \times \{+\} \times \{+, -\}$
Fritz wird gezogen und löst beide Aufgaben	$\{\langle \text{Fritz}, +, + \rangle\}$



Anwendung und Interpretation

- Problem: Wahrscheinlichkeiten sind in der Regel unbekannt
- Ziel: Schätzung der Wahrscheinlichkeiten oder anderer Kenngrößen
- Wahrscheinlichkeiten sind *theoretische* Größen
- Beispiel: Münzwurfexperiment



Definition σ -Algebra

Definition 2.1.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Menge von Teilmengen einer Menge Ω . Die Menge $\mathfrak{A}$ heißt dann σ -Algebra, wenn gelten:

- (a) $\Omega \in \mathfrak{A}$;
- (b) wenn $A \in \mathfrak{A}$, dann $\bar{A} \in \mathfrak{A}$ ($\bar{A}$ ist das Komplement von A);
- (c) wenn $A_1, A_2, \dots$ eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{A}$ ist, dann ist auch deren Vereinigung $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ Element von $\mathfrak{A}$.



Definition Wahrscheinlichkeit, usw. 1

Definition 2.2

Seien $\mathfrak{A}$ eine σ -Algebra auf einer Menge Ω sowie $P: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf $\mathfrak{A}$.

Man betrachte die Bedingungen (Kolmogoroff-Axiome):

(a) $P(A) \geq 0$, für alle $A \in \mathfrak{A}$; *Nichtnegativität*

(b) ist $A_1, A_2, \dots$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$,

dann gilt: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ *σ -Additivität*

(c) $P(\Omega) = 1$. *Normierung*



Definition Wahrscheinlichkeit, usw. 2

Wenn die Bedingungen (a) bis (c) aus Def. 2.2 gelten, dann heißen:

- (i) die Funktion P „*Wahrscheinlichkeitsmaß*“,
- (ii) das Tripel $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ „*Wahrscheinlichkeitsraum*“,
- (iii) die Elemente $A_i \in \mathfrak{A}$ „*Ereignisse*“,
- (iv) der Wert $P(A)$ „*Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A* “,
- (v) die Mengen $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$, „*Elementarereignisse*“ und
- (vi) die Menge Ω die „*Menge der möglichen Ergebnisse*“.



Beispiel für einen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

Tabelle 2.2.

Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten beim zweimaligen Münzwurf

$A_i \in \mathfrak{A}$	$P(A_i)$	Anmerkung
$A_0 = \emptyset$	0	
$A_1 = \Omega$	1	Bedingung (c) der Def. 2
$A_2 = \{\langle K, K \rangle\}$	1/4	faire Münze!
$A_3 = \{\langle K, Z \rangle\}$	1/4	dto.
$A_4 = \{\langle Z, K \rangle\}$	1/4	dto.
$A_5 = \{\langle Z, Z \rangle\}$	1/4	dto.
$A_6 = \{\langle K, K \rangle, \langle K, Z \rangle\}$	$P(A_2) + P(A_3) = 1/2$	Bedingung (b) der Def. 2
$A_7 = \{\langle K, K \rangle, \langle Z, K \rangle\}$	$P(A_2) + P(A_4) = 1/2$	dto.
$A_8 = \{\langle K, K \rangle, \langle Z, Z \rangle\}$	$P(A_2) + P(A_5) = 1/2$	dto.
$A_9 = \{\langle K, Z \rangle, \langle Z, K \rangle\}$	$P(A_3) + P(A_4) = 1/2$	dto.
$A_{10} = \{\langle K, Z \rangle, \langle Z, Z \rangle\}$	$P(A_3) + P(A_5) = 1/2$	dto.
$A_{11} = \{\langle Z, K \rangle, \langle Z, Z \rangle\}$	$P(A_4) + P(A_5) = 1/2$	dto.
$A_{12} = \{\langle K, K \rangle, \langle K, Z \rangle, \langle Z, K \rangle\}$	$P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 3/4$	dto.
$A_{13} = \{\langle K, K \rangle, \langle K, Z \rangle, \langle Z, Z \rangle\}$	$P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) = 3/4$	dto.
$A_{14} = \{\langle K, K \rangle, \langle Z, K \rangle, \langle Z, Z \rangle\}$	$P(A_2) + P(A_4) + P(A_5) = 3/4$	dto.
$A_{15} = \{\langle K, Z \rangle, \langle Z, K \rangle, \langle Z, Z \rangle\}$	$P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 3/4$	dto.



Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

Theorem 2.1

Seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$A, B \in \mathfrak{A}$ Ereignisse. Dann gelten:

- (i) wenn $B \subset A$, dann $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ und $P(A) \geq P(B)$;
- (ii) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$;
- (iii) für $\bar{A} := \Omega \setminus A$ gilt: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit (Diagramm)

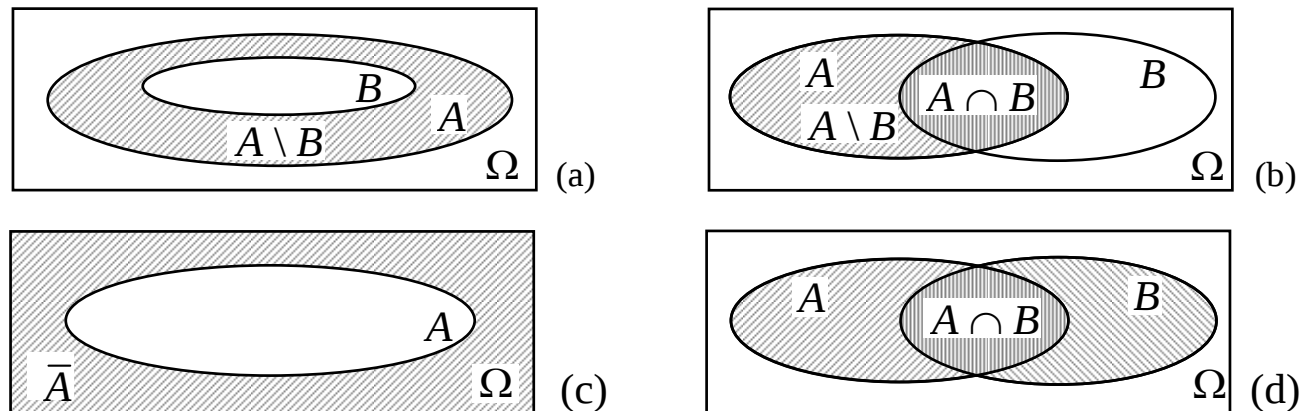
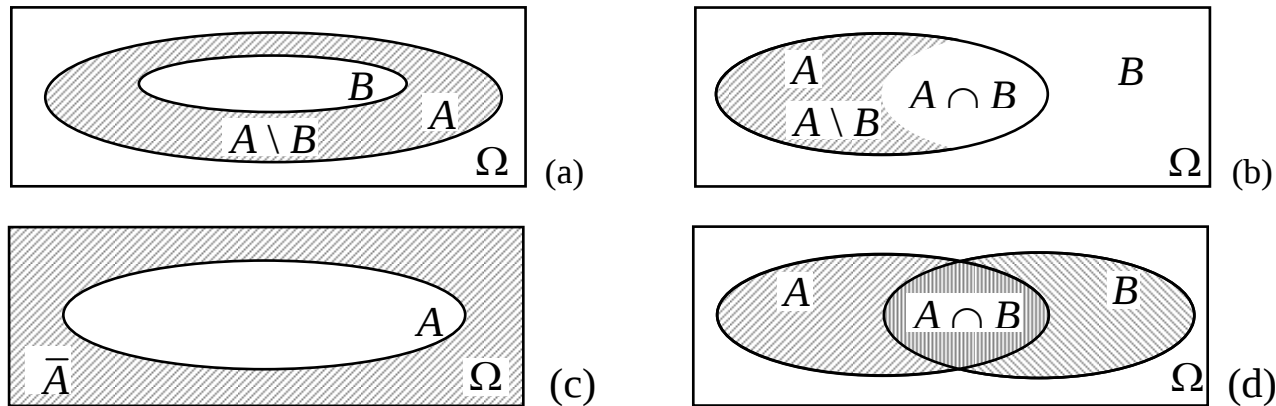


Abbildung 2.1

Venn-Diagramme zur Veranschaulichung der in Theorem 2.1 genannten Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes



Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit



- (i) wenn $B \subset A$, dann $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ und $P(A) \geq P(B)$;
- (ii) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$;
- (iii) für $\bar{A} := \Omega \setminus A$ gilt: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- (iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.